



Sèrie 5

EXERCICI 1

OPCIÓ A

1.1.

0,75 p Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre la Hera degut a l'atracció del Mart és:

$$F = G \frac{M_H M_M}{r^2}$$

D'altra banda, la relació entre la força i la intensitat del camp gravitatori és.

$$F = M_H g$$

Per tant la intensitat del camp gravitatori és:

$$g = G \frac{M_M}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{6,42 \cdot 10^{23}}{(3,39 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^6)^2} = 0,608 \text{ m/s}^2$$

0,25 p I la força és:

$$F = M_H g = 1130 \cdot 0,608 = 687 \text{ N}$$

0,25 p La força és atractiva i dirigida al llarg de la línia que uneix els dos objectes:



1.2.

La tercera llei de Kepler estableix:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constant}$$

0,75 p Per tant,

$$\frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \Rightarrow a_H = a_T \sqrt[3]{\left(\frac{T_H}{T_T}\right)^2} = 1,50 \cdot 10^{11} \sqrt[3]{\left(\frac{2 \cdot 365 + 274}{365}\right)^2} = 2,94 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

0,25 p $a_H = \frac{r_{aH} + r_{pH}}{2} \Rightarrow r_{aH} = 2a_H - r_{pH} = 4,40 \cdot 10^{11} \text{ m}$



0,25 p El moment angular s'expressa com:

$$\vec{L} = M_H \vec{r} \times \vec{v},$$

on $\vec{r}$ és el vector de posició que apunta del centre del Sol a Hera i $\vec{v}$ és la velocitat d'Hera. El mòdul del moment angular s'expressa com:

$$L = M_H r v \sin\theta,$$

on θ és l'angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{v}$. Com al periheli i a l'afeli $\vec{r}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars, $\theta = \pi/2$ i $\sin\theta = 1$.

Per tant, si imposem la conservació del moment angular entre el periheli i l'afeli tenim:

$$M_H r_{aH} v_a = M_H r_{pH} v_p$$

I si aïllem el quocient de velocitats tenim:

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_{aH}}{r_{pH}}$$

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_{aH}}{r_{pH}} = \frac{4,40 \cdot 10^{11} \text{ m}}{1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}} = 2,95$$

És a dir, la velocitat al periheli és pràcticament el triple de la velocitat a l'afeli.



OPCIÓ B

1.1.

0,65 p Segons la llei de la gravitació universal, el mòdul de la força sobre la sonda degut a l'atracció del Mart és:

$$F = G \frac{mM_M}{r^2}$$

I la segona llei de Newton estableix que: $\vec{F} = m\vec{a}$

Considerant que la sonda descriu un moviment circular la seva acceleració centrípeta és: $a = \omega^2 r = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$, on $T = 24 \text{ h} + 37 \text{ min} = 88620 \text{ s}$

I substituint el valor de l'acceleració centrípeta obtenim:

$$G \frac{mM_M}{r^2} = m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \Rightarrow r = \sqrt[3]{T^2 \frac{GM_M}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{88620^2 \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}{4\pi^2}} = 2,04 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Alternativament, a partir de la 3^a llei de Kepler

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_M} \Rightarrow r = \sqrt[3]{T^2 \frac{GM_M}{4\pi^2}} = 2,04 \cdot 10^7 \text{ m}$$

0,1 p I l'alçada sobre la superfície és:

$$h = r - R_M = 2,04 \cdot 10^7 - 3,39 \cdot 10^6 = 1,70 \cdot 10^7 \text{ m}$$

0,5 p D'altra banda, la relació entre la força i la intensitat del camp gravitatori és: $F = mg$

Per tant la intensitat del camp gravitatori és:

$$g = G \frac{M_M}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{6,42 \cdot 10^{23}}{(2,04 \cdot 10^7)^2} = 0,103 \text{ m/s}^2$$



1.2.

0,25 p Les distàncies al periastre, a l'apoastre i el semieix major es poden calcular directament a partir de les altures:

$$r_a = (320 + 3,39 \cdot 10^3) \cdot 10^3 = 3,71 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$r_p = (255 + 3,39 \cdot 10^3) \cdot 10^3 = 3,645 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = 3,68 \cdot 10^6 \text{ m}$$

0, 5 p I la tercera llei de Kepler estableix: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_M}$

$$\text{Així: } T = \sqrt{a^3 \frac{4\pi^2}{GM_M}} = \sqrt{(3,68 \cdot 10^6)^3 \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6,42 \cdot 10^{23}}} = 6,78 \cdot 10^3 \text{ s}$$

0,25 p A partir de la definició de l'energia mecànica tenim:

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - G \frac{mM_M}{r_p} = -G \frac{mM_M}{2a} \Rightarrow v_p = \sqrt{GM_M \left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right)} = 3,44 \cdot 10^3 \text{ m/s}$$

0,25 p El moment angular s'expressa com:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

on $\vec{r}$ és el vector de posició que apunta del centre de Mart a la sonda i $\vec{v}$ és la seva velocitat. El mòdul del moment angular s'expressa com:

$$L = m r v \sin\theta$$

on θ és l'angle que formen $\vec{r}$ i $\vec{v}$. Com al periastre $\vec{r}$ i $\vec{v}$ són perpendiculars, $\theta = \pi/2$ i $\sin\theta = 1$. Llavors:

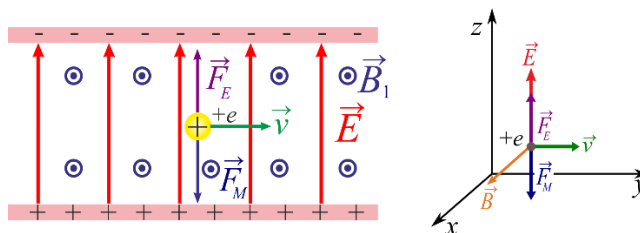
$$L = m r_p v_p = 1187 \cdot 3,645 \cdot 10^6 \cdot 3,44 \cdot 10^3 = 1,49 \cdot 10^{13} \text{ kg m}^2/\text{s}$$



EXERCICI 2

2.1.

0,25 p La força elèctrica és paral·lela al camp elèctric (càrrega positiva), la força magnètica és perpendicular a la velocitat i al camp magnètic i el sentit el determinem amb la regla de la ma dreta:



0,25 p El camp elèctric creat entre les plaques és:

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{500}{0,02} = 2,50 \cdot 10^4 \text{ V}$$

0,25 p La força elèctrica s'expressa com:

$$\vec{F}_E = e\vec{E}$$

0,25 p La força magnètica s'expressa com:

$$\vec{F}_M = e\vec{v} \times \vec{B}$$

0,25 p No es desvia quan $\vec{F}_E + \vec{F}_M = \vec{0}$ i com $\vec{B}$ és perpendicular a $\vec{v}$

$$eE = evB \Rightarrow B = \frac{E}{v}$$

$$B = \frac{E}{v} = \frac{2,50 \cdot 10^4}{4,0 \cdot 10^4} = 0,625 \text{ T}$$



2.2.

0,85 p Sabem que $\vec{F}_m = e\vec{v} \times \vec{B}$. Com $\vec{B}$ és perpendicular a $\vec{v}$, el mòdul de la força magnètica s'expressa com:

$$F_m = evB$$

Com la força magnètica és perpendicular a $\vec{v}$ i de mòdul constant, l'acceleració serà normal i constant, és a dir, l'ió descriurà un moviment circular uniforme (mòdul de la velocitat constant).

El radi de la trajectòria es pot obtenir a partir de la segona llei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

i tenint en compte que l'acceleració centrípeta s'expressa com:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

I el radi és,

$$evB = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{eB} = \frac{5,81 \cdot 10^{-26} \cdot 4,0 \cdot 10^4}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,3} = 4,83 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

0,15 p I finalment l'ió impacta a una distància igual al diàmetre:

$$d = 2r = 9,67 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

0,25 p Com la força (i l'acceleració) són perpendicular a la velocitat, el mòdul de la velocitat no canvia (no hi ha component tangencial de l'acceleració), només hi ha un canvi de direcció. Per tant, el mòdul de la velocitat i l'energia cinètica romanen constants.



EXERCICI 3

OPCIÓ A

3.1.

0,25 p Es veuen 5 nodes i 4 ventres, per tant, correspon al quart harmònic.

0,25 p Hi ha dues longituds d'ona complertes, per tant:

$$2\lambda = 0,36 \text{ m} \Rightarrow \lambda = 0,18 \text{ m}$$

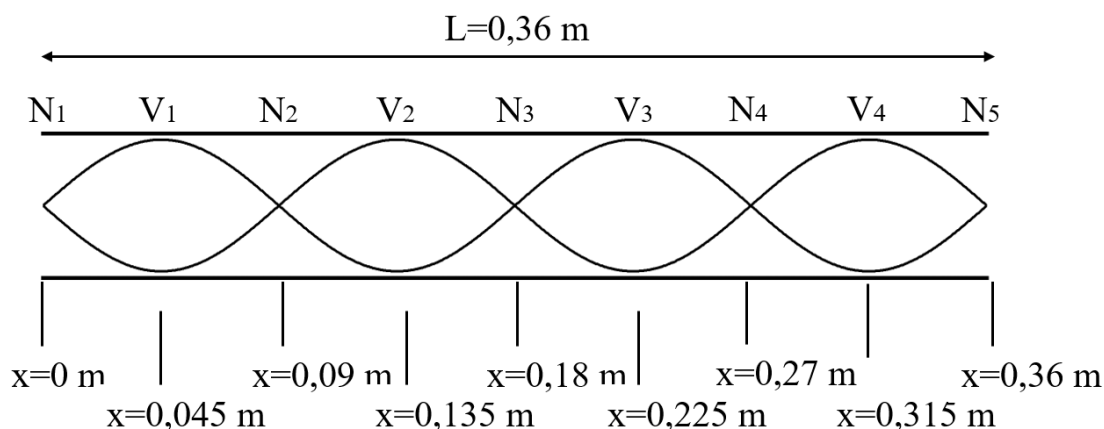
0,25 p Podem obtenir la velocitat a partir de la relació entre la longitud d'ona i la freqüència:

$$v = \lambda \cdot f = 0,18 \cdot 357 = 64,3 \text{ m/s}$$

0,5 p La distància entre nodes és mitja longitud d'ona, 0,09 m. Els ventres es troben entre nodes a mitja distància, $x_N = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}$, llavors:

Primer node $x_{N1} = 0 \text{ m}$, segon node $x_{N2} = 0,09 \text{ m}$, tercer node $x_{N3} = 0,18 \text{ m}$, quart node $x_{N4} = 0,27 \text{ m}$, cinquè node $x_{N5} = 0,36 \text{ m}$, primer ventre $x_{V1} = 0,045 \text{ m}$, segon ventre $x_{V2} = 0,135 \text{ m}$, tercer ventre $x_{V3} = 0,225 \text{ m}$ i quart ventre $x_{V4} = 0,315 \text{ m}$.

Alternativament:





3.2.

0,25 p $\omega = 2\pi f = 714\pi \text{ rad/s} = 2240 \text{ rad/s}$ i $A = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

Primera opció

0,25 p Equació del MHS:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

0,25 p $x_0 = x(t=0) = A.$

$$A = A \sin(\varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \text{ArcSin}(1) = \pi/2 \text{ rad.}$$

Finalment l'equació del moviment és:

$$x(t) = 5 \cdot 10^{-4} \sin(2240 t + \pi/2), x \text{ en m i } t \text{ en s.}$$

Alternativament:

0,25 p Equació del MHS:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

0,25 p $x_0 = x(t=0) = A.$

$$A = A \cos(\varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \text{ArcCos}(1) = 0 \text{ rad}$$

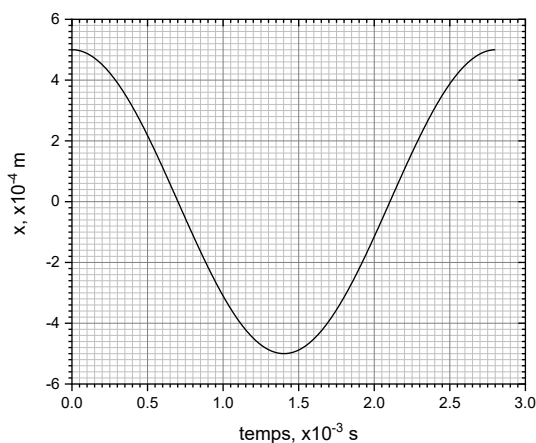
Finalment l'equació del moviment és:

$$x(t) = 5 \cdot 10^{-4} \cos(2240 t), x \text{ en m i } t \text{ en s.}$$

0,2 p Per fer la representació gràfica primer calcularem el període

$$T = \frac{1}{f} = 2,80 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

0,3 p Representació gràfica amb títols, unitats i ben escalada:





OPCIÓ B

3.1.

0,5 p La longitud d'ona depèn del medi, però la freqüència no depèn del medi, per tant, podem determinar la freqüència a partir de la velocitat de la llum i la longitud d'ona al buit:

$$f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{650 \cdot 10^{-9}} = 4,62 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

0,5 p Per altra banda, la velocitat de propagació de la llum a la fibra és:

$$v = \frac{c}{n_1} = \frac{3,00 \cdot 10^8}{1,48} = 2,03 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

0,25 p I finalment, al longitud d'ona dins la fibra és:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{2,03 \cdot 10^8}{4,62 \cdot 10^{14}} = 439 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 439 \text{ nm}$$

3.2.

0,5 p Perquè hi hagi reflexió total, l'angle d'incidència respecte la normal a P ha de ser més gran o igual que l'angle límit. L'angle límit (o crític) és l'angle d'incidència respecte la normal de la interfície pel qual l'angle de refracció és 90° . A partir de la llei de Snell:

$$n_1 \sin \theta_L = n_2 \sin 90^\circ$$

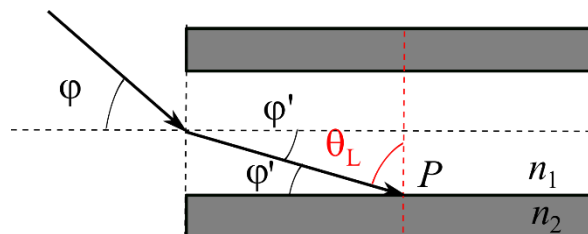
Per tant l'angle límit serà:

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \arcsin\left(\frac{1,44}{1,48}\right) = 76,65^\circ$$

0,75 p Per trobar l'angle màxim d'incidència φ , primer cal trobar l'angle transmès φ' . De la figura és evident que

$$\varphi' = 90^\circ - \theta_L = 90^\circ - 76,65^\circ = 13,35^\circ$$

Un cop coneixem φ' podem determinar φ a partir de la llei de Snell:



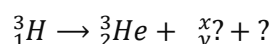
$$n_{\text{aire}} \sin \varphi = n_1 \sin \varphi' \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{n_1 \sin \varphi'}{n_{\text{aire}}}\right) = \arcsin\left(\frac{1,48 \sin (13,35^\circ)}{1}\right) = 20,0^\circ$$



EXERCICI 4

4.1.

1,0 p La reacció ha de complir la conservació del nombre màssic nuclears i a més ha de conservar la càrrega, amb aquestes premisses, la reacció de desintegració serà:



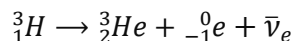
Per una banda es compleix la conservació del nombre màssic:

$$3 = 3 + x \Rightarrow x = 0$$

I per a la conservació de càrrega:

$$1 = 2 + y \Rightarrow y = -1$$

Per tant, la partícula que busquem és un electró (${}^0_{-1}e$). A banda aquestes reaccions per complir la conservació d'energia emeten neutrins, que per conservar el nombre leptònic hauria de tractar-se d'una antipartícula, per tat serà un antineutrí de la família electrònica. La reacció completa és:



Alternativament es pot escriure ${}^0_{-1}\beta$ o e^- enlloc de ${}^0_{-1}e$.

Si no s'indica l'antineutrí cal restar 0,25 p.

No cal que l'estudiant detalli les operacions relacionades amb la conservació de la càrrega i del nombre màssic, són operacions molt senzilles que es poden fer de cap, per tant, només es valorarà si ha estat capaç de deduir correctament els diferents termes de la reacció.

0,25 p Es tracta d'una desintegració β^- .



4.2.

0,25 p La constant de desintegració λ la obtenim a partir del període de semidesintegració:

$$A(t) = \frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda t_{1/2}} \text{ i per tant, } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

$$\text{i } t_{1/2} = 4500 \text{ dies} = 3,89 \cdot 10^8 \text{ s}$$

$$\text{Directament obtenim } \lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{3,89 \cdot 10^8 \text{ s}} = 1,78 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}$$

0,4 p Per altra banda sabem que al cap de 5 anys ($t = 1,58 \cdot 10^8 \text{ s}$) l'activitat s'ha reduït a $7,60 \cdot 10^{14} \text{ Bq}$:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow A_0 = A(t) e^{\lambda t} = 7,60 \cdot 10^{14} e^{1,78 \cdot 10^{-9} \cdot 1,58 \cdot 10^8} = 1,01 \cdot 10^{15} \text{ Bq}$$

0,4 p Perquè sigui segura l'activitat ha de ser:

$$A(t) = 10^7 \cdot 8,60 \cdot 10^5 = 8,60 \cdot 10^{12} \text{ Bq}$$

i:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right) = -\lambda t$$

$$t = \frac{-1}{\lambda} \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right) = \frac{-1}{1,78 \cdot 10^{-9}} \ln\left(\frac{8,60 \cdot 10^{12}}{1,01 \cdot 10^{15}}\right) = 2,67 \cdot 10^9 \text{ s} = 84,7 \text{ anys}$$

0,2 p Aquesta pregunta no té una resposta tancada, per tant, es valorarà correctament si l'argument és coherent.

Es pot defensar que no és una mesura gaire bona perquè en el moment de fer l'abocament l'activitat per unitat de volum està molt lluny de ser aconsellable. De fet, diversos països veïns veuen amb mals ulls la proposta. A més, depèn de la velocitat amb què tingui lloc la dispersió, existència de corrents (recordem per exemple l'existència de grans illes d'acumulació de plàstics al mig de l'Oceà Pacífic), podent-se produir nivells locals de contaminació massa alts, per no parlar de danys locals en plàncton i fauna marina al lloc d'abocament, ja que la concentració encara que sigui en quantitats petites segueix sent molt per sobre del recomanable.

No obstant, també es considerarà correcte, que l'estudiant argumenti que amb el temps, la concentració disminuirà significativament en diluir-se en una gran massa d'aigua.